Eine weitere Untersuchung über imaginäre Integralformeln*

Leonhard Euler

Lemma

§1 Die ganze Theorie von imaginären Größen, aus welcher so viele außerordentliche Zuwächse nun freilich in die Analysis Einzug gehalten haben, ist hauptsächlich auf dieses Fundament gestützt, dass, wenn Z irgendeine Funktion von z war und sie für $z = x + y\sqrt{-1}$ gesetzt in diese Form $M + N\sqrt{-1}$ übergeht, dann dieselbe Funktion Z für $z = x - y\sqrt{-1}$ gesetzt $= M - N\sqrt{-1}$ wird; hier bedeuten freilich die Buchstaben M und N immer reelle Größen. Wenn also diese Differentialformel $Z\partial z$ vorgelegt wird, deren Integral $\int Z\partial z = V$ sei und in ihr $z = x + y\sqrt{-1}$ gesetzt wird, woraus $Z = M + N\sqrt{-1}$ hervorgehe, wird das Integral selbst von dieser Form $V = P + Q\sqrt{-1}$ sein. Weil nämlich

$$\partial V = Z\partial z = M\partial x - N\partial y + (N\partial x + M\partial y)\sqrt{-1}$$

ist, wird das Integral

$$\int (M\partial x - N\partial y) + \sqrt{-1} \cdot \int (N\partial x + M\partial y) = P + Q\sqrt{-1}$$

sein. Es ist also notwendig, dass für $z = x - y\sqrt{-1}$ gesetzt

*Originaltitel: "Ulterior disquitio de formulis integralibus imaginariis", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 10* (1797, verfasst 1777): pp. 3–19, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 19, pp. 268 – 286, Eneström-Nummer E694, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$P - Q\sqrt{-1} = \int (M\partial x - N\partial y) - \sqrt{-1} \cdot \int (N\partial x + M\partial y)$$

wird. Daher ist aber offensichtlich, dass

$$P = \int (M\partial x - N\partial y) \quad \text{und} \quad Q = \int (N\partial x + M\partial y)$$

sein wird. Daher sieht man ein, dass bei Substitutionen von dieser Art immer die reellen und imaginären Anteile getrennt voneinander einander gleich sein müssen.

§2 Diese Entwicklung gibt uns nun vorzügliche Eigenschaften an die Hand, welche zwischen den Größen M, N, P und Q bestehen. Weil nämlich zuerst

$$P = \int (M\partial x - N\partial y)$$

ist, weil die Formel ja immer eine Integration zulässt, wird nach einem allgemeinen Kriterium von Formeln dieser Art

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

sein. Aber in gleicher Weise, weil wir

$$Q = \int (N\partial x + M\partial y)$$

haben, wird wegen der Integrierbarkeit dieser Formel

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

sein. Siehe also, mit einer solchen Substitution werden immer zwei Funktionen M und N solcher Art der zwei Variablen x und y gefunden, die mit diesen besonderen Eigenschaften behaftet sind, dass so

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

wie

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

ist.

§3 Die gleiche Eigenschaft kommt auch den Größen P und Q zu. Weil nämlich

$$\partial P = M\partial x - N\partial y \quad \text{und} \quad \partial Q = M\partial y + N\partial x$$

ist, wird mit den gleichen Bezeichnungen

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = M \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -N,$$
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = N \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = M,$$

sein, woher es offensichtlich ist, dass

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

sein wird. Aber solche Relationen sind umso bemerkenswerter, weil die Ursache weniger klar ist, sobald für Z ein wenig kompliziertere Funktionen angenommen werden.

§4 Ich habe nicht vor allzu langer Zeit nach diesen Prinzipien die Integralformel

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1 \pm z^n}$$

betrachtet, woher ich mehrere nicht zu verachtende Relationen von dieser Art erhalten habe. Dann habe ich die Betrachtung auch auf diese Formel

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[n]{1+z^n}}$$

ausgedehnt; weil deren Integral sich immer mit Logarithmen und Kreisbogen ausdrücken lässt, müssen daher für die Buchstaben P und Q auch Formeln von solcher Art hervorgehen, welche die gleiche Integration zulassen, auch wenn kaum ein Weg offensteht diese Integrationen durchzuführen. Und auf diese Weise bin ich zu einem höchst bemerkenswerten Theorem geführt worden, dessen Beweis beinahe die Kräfte der Analysis zu übersteigen scheint; dennoch habe ich indes später seinen Beweis entdeckt; deswegen habe ich beschlossen, diesen Gegenstand noch einmal ein wenig allgemeiner zu betrachten.

§5 Ich werde also hier die sich um vieles weiter erstreckende Integralformel betrachten

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{(a+bz^n)^\lambda} = V,$$

wo, damit die Rechnung in angenehmerer Weise gelingt, ich anstelle von z diese imaginäre Formel

$$z = v(\cos\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin\theta)$$

einsetze, welche natürlich alle imaginären Größen in sich umfasst; aber dann werde ich hier den Winkel θ als konstant ansehen, sodass allein v für uns variabel ist, woher also sofort

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v}$$

ist. Weil also

$$z^m = v^m(\cos m\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin m\theta)$$

ist, wird der Zähler dieser Formel sofort

$$z^{m-1}\partial z = v^{m-1}(\cos m\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin m\theta)\partial v.$$

Wir wollen annehmen, dass aus dieser Substitution dieser Integralwert hervorgeht

$$V = P + Q\sqrt{-1}.$$

§6 Für den Nenner werden wir aber

$$a + bz^n = a + bv^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin n\theta)$$

erhalten, dessen Realteil also

$$a + bv^n\cos n\theta$$

ist, der Imaginärteil ist hingegen

$$bv^n\sqrt{-1}\cdot\sin n\theta;$$

daher, wenn der Exponent eine ganze Zahl wäre, könnten die imaginären Größen leicht aus dem Nenner in den Zähler gebracht werden, indem wir natürlich mit

$$(a + bv^n(\cos n\theta - \sqrt{-1} \cdot \sin n\theta))^\lambda$$

erweitern. Aber weil diese Fälle keine Schwierigkeiten bereiten, ist es gefällig, dass die Rechnung hauptsächlich auf gebrochene für λ anzunehmende Fälle angewandt wird.

§7 Für dieses Ziel wollen wir anstelle der Variable v eine andere s zusammen mit dem bestimmten Winkel φ einführen, sodass

$$a + bv^n \cos n\theta = s \cos \varphi \quad \text{und} \quad bv^n \sin n\theta = s \sin n\theta = s \sin \varphi$$

ist, woher also eine bestimmte Relation zwischen dieser neuen Variable s und dem Winkel φ definiert wird, sodass entweder allein der Buchstabe s oder allein der Winkel φ in die Rechnung eingeführt werden kann. Es ist aber ersichtlich, dass diese zwei Größen so über die Variable v bestimmt werden, dass gilt:

$$\text{I.} \quad ss = aa + 2av^n \cos n\theta + bbv^{2n},$$

$$\text{II.} \quad \tan \varphi = \frac{bv^n \sin n\theta}{a + bv^n \cos n\theta}.$$

§8 Hier wird aber sofort eingesehen, dass die Größe s nicht sehr bequem anstelle von v in die Rechnung eingeführt werden kann, weil ja der Winkel φ, dessen verschiedene Vielfachen auftauchen, sich auf keine Weise aus der Rechnung herauswerfen lässt, oder zumindest verwickelte Formeln in die Rechnung hineinbrächte. Deswegen wird es gefällig sein, die ganze Rechnung allein auf die Variable φ zu reduzieren, sodass uns die Aufgabe gestellt ist, die beiden Größen v und s über diese neue Variable φ zu bestimmen.

§9 Bevor wir dies aber angehen, wollen wir bemerken, dass der Nenner unserer Formeln über die beiden angenommenen Variablen s und φ so in angenehmer Art und Weise ausgedrückt wird, dass

$$a + bz^n = s(\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi)$$

und daher der ganze Nenner

$$(a + bz^n)^\lambda = s^\lambda(\cos\lambda\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\lambda\varphi)$$

wird. Wenn wir also mit

$$\cos\lambda\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin\lambda\varphi$$

erweitern, wird unsere Formel unter Beibehalt des Zählers die folgende Form annehmen

$$\int \frac{v^{m-1}\partial v(\cos m\theta + \sqrt{-1} \cdot \sin m\theta)(\cos\lambda\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin\lambda\varphi)}{s^\lambda} = V,$$

welche zu dieser ziemlich einfachen Form zusammengezogen wird

$$\int \frac{v^{m-1}\partial v}{s^\lambda}(\cos(m\theta - \lambda\varphi) + \sqrt{-1} \cdot \sin(m\theta - \lambda\varphi));$$

ihr Wert, weil

$$= P + Q\sqrt{-1}$$

gesetzt worden ist, wird nach Trennen und Real- und Imaginärteilen

$$P = \int \frac{v^{m-1}\partial v \cos(m\theta - \lambda\varphi)}{s^\lambda}$$

und

$$Q = \int \frac{v^{m-1}\partial v \sin(m\theta - \lambda\varphi)}{s^\lambda}$$

sein.

§10 Um nun die beiden Buchstaben v und s daraus hinauszuwerfen, wollen wir zu den beiden zuvor aufgestellten Gleichungen zurückkehren

$$\text{I.} \quad a + bv^n \cos n\theta = s\cos\varphi,$$

$$\text{II.} \quad bv^n \sin n\theta = s\sin\varphi.$$

Hier wird zuerst die Größe s durch diese Kombination eliminiert werden:

$$\text{I. } \sin\varphi - \text{II. } \cos\varphi,$$

woher

$$a\sin\varphi = bv^n\sin(n\theta - \varphi)$$

wird, und daher

$$v^n = \frac{a\sin\varphi}{b\sin(n\theta - \varphi)}$$

und so haben wir schon den Wert des Buchstabens v über den Winkel φ erhalten. Weiter liefert diese Kombination

$$\text{I. } \sin n\theta - \text{II. } \cos n\theta$$

diese Gleichung

$$a\sin n\theta = s\sin(n\theta - \varphi),$$

woher

$$s = \frac{a\sin n\theta}{\sin(n\theta - \varphi)}$$

wird, aus welchem Wert wir

$$P = \frac{1}{a^\lambda \sin^\lambda n\theta}\int v^{m-1}\partial v \sin^\lambda(n\theta - \varphi)\cos(m\theta - \lambda\varphi)$$

und

$$Q = \frac{1}{a^\lambda \sin^\lambda n\theta}\int v^{m-1}\partial v \sin^\lambda(n\theta - \varphi)\sin(m\theta - \lambda\varphi)$$

erhalten.

§11 Weil wir ja weiter

$$v^n = \frac{a\sin\varphi}{b\sin(n\theta - \varphi)}$$

finden, werden wir nach Nehmen von Logarithmen

$$n\log v = \log a\varphi - \log b\sin(n\theta - \varphi)$$

und daher nach Differenzieren

$$\frac{n\partial v}{v} = \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\partial\varphi\cos(n\theta-\varphi)}{\sin(n\theta-\varphi)} = \frac{\partial\varphi\sin n\theta}{\sin\varphi\sin(n\theta-\varphi)}$$

haben. Weiter wird

$$v^m = \left(\frac{a\sin\varphi}{b\sin(n\theta-\varphi)}\right)^{\frac{m}{n}}$$

sein. Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, werden wir zu den folgenden Integralformeln geführt werden

$$P = \frac{1}{na^\lambda\sin^{\lambda-1}\theta}\int\left(\frac{a\sin\varphi}{b\sin(n\theta-\varphi)}\right)^{\frac{m}{n}}\frac{\partial\varphi\sin^\lambda(n\theta-\varphi)\cos(m\theta-\lambda\varphi)}{\sin\varphi\sin(n\theta-\varphi)},$$

$$Q = \frac{1}{na^\lambda\sin^{\lambda-1}\theta}\int\left(\frac{a\sin\varphi}{b\sin(n\theta-\varphi)}\right)^{\frac{m}{n}}\frac{\partial\varphi\sin^\lambda(n\theta-\varphi)\sin(m\theta-\lambda\varphi)}{\sin\varphi\sin(n\theta-\varphi)}.$$

Wenn wir nun der Kürze wegen

$$n\theta - \varphi = \psi$$

setzen, dass $\varphi + \psi = n\theta$ und daher $\partial\varphi + \partial\psi = 0$ ist, werden die beiden Formeln auf die folgende Weise gefälliger dargestellt werden können:

$$P = \frac{a^{\frac{m}{n}-\lambda}}{nb^{\frac{m}{n}}\sin^{\lambda-1}n\theta}\int\partial\varphi\sin^{\frac{m-n}{n}}\varphi\sin^{\lambda-\frac{m}{n}-1}\cos(m\theta-\lambda\varphi),$$

$$Q = \frac{a^{\frac{m}{n}-\lambda}}{nb^{\frac{m}{n}}\sin^{\lambda-1}n\theta}\int\partial\varphi\sin^{\frac{m-n}{n}}\varphi\sin^{\lambda-\frac{m}{n}-1}\sin(m\theta-\lambda\varphi).$$

§12 Siehe also, wir sind zu zwei Integralformeln geführt worden, deren Integration, obgleich sie wegen des gebrochenen Exponenten $\frac{m}{n}$ schwierig scheint, dennoch immer von der vorgelegten grundlegenden Formel

$$\int\frac{z^{m-1}\partial z}{(a+\pm bz^n)^\lambda}$$

abhängen wird; wenn also ihr Integral entweder algebraisch oder zumindest mit logarithmen und Kresibogen angegeben werden kann, werden wir mit Sicherheit bestätigen können, dass die beiden hier gefundenen Formeln nach demselben Gesetz integriert werden können. Hier offenbart sich freilich zuerst der Fall $m = n$, in welcher das Integral sogar algebraisch dargeboten werden kann; aber weil in diesem Fall $\frac{m}{n}$ nicht weiter ein Bruch ist, wollen wir ihn hier auslassen.

§13 Aber hier tritt ein besonders merkwürdiger Fall auf, in welchem $\lambda = \frac{m}{n}$ ist, in welchem sich die Integration mit logarithmen und Kreisbogen erledigen lässt. Wenn wir nämlich für unsere Integralformel

$$\int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^m}{(a+bz^n)^{\frac{m}{n}}}$$

hier

$$\frac{z}{(a+bz^n)^{\frac{1}{n}}} = t$$

setzen, dass die Formel

$$\int t^m \frac{\partial z}{z}$$

ist, wird

$$t^n = \frac{z^n}{a+bz^n}$$

sein, woher man

$$z^n = \frac{at^n}{bt^n - 1}$$

berechnet; und daher wird durch logarithmisches Differenzieren

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial t}{t} - \frac{bt^{n-1}\partial t}{bt^n - 1} = \frac{-\partial t}{t(bt^n - 1)}$$

sein, sodass unsere zu integrierende Formel

$$-\int \frac{t^{m-1}\partial t}{bt^n - 1}$$

ist; weil diese rational ist, kann sie immer mit Logarithmen und Kreisbogen integriert werden, was also auch über unsere zwei Formeln P und Q festzuhalten sein wird.

§14 Wir wollen also in unseren oben gefundenen Formeln $\lambda = \frac{m}{n}$ setzen und sie werden in die folgenden transformiert werden

$$P = \frac{1}{nb^{\frac{m}{n}} \sin^{\lambda-1}\theta} \cdot \int \frac{\partial\varphi \sin^{\frac{m}{n}-1}\varphi \cos\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin\psi},$$

$$Q = \frac{1}{nb^{\frac{m}{n}} \sin^{\lambda-1}\theta} \cdot \int \frac{\partial\varphi \sin^{\frac{m}{n}-1}\varphi \sin\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin\psi},$$

wo man der Kürze wegen anstelle des konstanten Koeffizienten C schreibe, und weil aus der Natur der vorgelegten Formel immer $m < n$ ist, lassen sich diese Formeln so in gedrungener darbieten:

$$P = C\int \frac{\partial\varphi \cos\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin\psi \sin^{\frac{n-m}{m}}\varphi}$$

und

$$P = C\int \frac{\partial\varphi \sin\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin\psi \sin^{\frac{n-m}{m}}\varphi},$$

welche Formeln also, welche Zahlen auch immer für m und n angenommen werden, zu verstehen sind, immer von Logarithmen und Kreisbogen abzuhängen.

§15 Wenn also diese beiden Formeln

$$\cos\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right) \quad \text{und} \quad \sin\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)$$

entwickelt werden, werden die gefundenen Integralformeln bequem zu einer zusammengezogen werden können, welche die Form haben wird

$$C\int \partial\varphi \frac{\alpha \sin\frac{m}{n}\varphi + \beta\cos\frac{m}{n}\varphi}{\sin\psi \sin^{\frac{n-m}{m}}\varphi},$$

welche nach der zuvor genannten Regel eine Integration zulassen wird, welche Werte auch immer den Buchstaben α und β zugeteilt werden. Weil weiter

$\psi = n\theta - \varphi$ ist, wird nach der Entwicklung anstelle von $\sin\psi$ oder einem Vielfachen von selbigem $\gamma\sin\varphi + \delta\cos\varphi$ geschrieben werden können und so wird unsere Formel nun

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin^{\frac{n-m}{m}}\varphi} \cdot \frac{\alpha\sin\frac{m}{n}\varphi + \beta\cos\frac{m}{n}\varphi}{\gamma\sin\varphi + \delta\cos\varphi}$$

sein, wo die Buchstaben α, β, γ, δ nach Belieben angenommen werden können; wenn wir also, um die Brüche zu beseitigen,

$$\varphi = n\omega$$

setzen, dass

$$\frac{m}{n}\varphi = m\omega$$

ist, werden wir zum folgenden höchst bemerkenswerten Theorem geführt.

Lehrsatz

Wenn die Buchstaben m und n irgendwelche ganzen Zahlen bezeichnen, kann die Integration dieser Formel

$$\int \frac{\partial\omega}{(\sin n\omega)^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha\sin m\omega + \beta\cos n\omega}{\gamma\sin n\omega + \delta\cos n\omega}$$

immer auf Logarithmen und Kreisbogen zurückgeführt werden, welche Werte auch immer den Buchstaben α, β, γ, δ zugeteilt werden.

§16 Wie mühevoll der Beweis dieses Theorems ist, werden wir besser verstehen, wenn wir diese Formel von den Winkeln auf gewöhnliche Formeln bringen. Wir wollen also

$$\tan\omega = t$$

setzen, es wird

$$\partial\omega = \frac{\partial t}{1+tt}$$

sein; wenn wir weiter der Kürze wegen die Binomialkoeffizienten auf diese Weise bezeichnen, dass

$$(1+x)^\lambda = 1 + \binom{\lambda}{1} x + \binom{\lambda}{2} x^2 + \binom{\lambda}{3} x^3 + \text{etc.}$$

ist, werden Sinus und Kosinus vielfacher Winkel von ω auf die folgende Weise über t ausgedrückt werden

$$\sin m\omega = \frac{\binom{m}{1} t - \binom{m}{3} t^3 + \binom{m}{5} t^5 - \binom{m}{7} t^7 + \text{etc.}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}}$$
$$\cos m\omega = \frac{1 - \binom{m}{2} t^2 + \binom{m}{4} t^4 - \binom{m}{6} t^6 - \binom{m}{7} t^8 + \text{etc.}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}}$$

Wir wollen aber weiter der Kürze wegen

$$\binom{m}{1} t - \binom{m}{3} t^3 + \binom{m}{5} t^5 - \text{etc.} = M,$$

$$1 - \binom{m}{2} t^2 + \binom{m}{4} t^4 - \text{etc.} = \mathfrak{M}$$

und in gleicher Weise auch

$$\binom{n}{1} t - \binom{n}{3} t^3 + \binom{n}{5} t^5 - \text{etc.} = N,$$

$$1 - \binom{n}{2} t^2 + \binom{n}{4} t^4 - \text{etc.} = \mathfrak{N}$$

setzen, dass wir

$$\sin m\omega = \frac{M}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}}, \quad \cos m\omega = \frac{\mathfrak{M}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}},$$
$$\sin n\omega = \frac{N}{(1+tt)^{\frac{n}{2}}}, \quad \cos n\omega = \frac{\mathfrak{N}}{(1+tt)^{\frac{n}{2}}}$$

haben; nachdem diese Werte eingesetzt worden sind, wird unsere Integralformel die folgende Form annehmen

$$\int \frac{(1+tt)^{n-m-1}\partial t(\alpha M + \beta\mathfrak{M})}{N^{\frac{n-m}{n}}(\gamma N + \delta\mathfrak{N})}.$$

Dort ist freilich alles rational außer der Formel $N^{\frac{m}{n}}$, welche aber, weil sie in

$$\left(\binom{n}{1}t-\binom{n}{3}t^3+\binom{n}{5}t^5-\text{etc.}\right)^{\frac{m}{n}}$$

übergeht, sobald n zwei übersteigt, dermaßen irrational wird, dass kein Weg offensteht die Irrationalität zu beseitigen, wenn nur $n=3$ war; um vieles weniger wird sich, wenn der Exponent n noch mehr wächst, Rationalität erhoffen lassen. Dennoch ist es mir indes geglückt, den folgenden Beweis zu finden.

Beweis des oberen Theorems

§17 Hier ist es vor allem ratsam, jene imaginären Formeln zur Hilfe zu nehmen, die ich schon öfter mit außerordentlichen Erfolg verwendet habe, in denen ich

$$\cos\omega++\sqrt{-1}\cdot\sin\omega=p \quad \text{und} \quad \cos\omega-\sqrt{-1}\cdot\sin\omega=q$$

setze, und es wird

$$pq=1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{p}=\partial\omega\sqrt{-1}$$

sein. Weiter werden wir aber daraus für die Sinus und Kosinus vielfacher Winkel

$$\sin m\omega=\frac{p^m-q^m}{2\sqrt{-1}}=\frac{p^{2m}-1}{2p^m\sqrt{-1}}$$

und

$$\cos m\omega=\frac{p^m+q^m}{2}=\frac{p^{2m}+1}{2p^m}$$

haben und in gleicher Weise

$$\sin n\omega=\frac{p^{2n}-1}{2p^n\sqrt{-1}} \quad \text{und} \quad \cos n\omega=\frac{p^{2n}+1}{2p^n}.$$

§18 Damit die Substitution dieser Werte erleichtert wird, wird es förderlich sein, bemerkt zu haben, dass die konstanten Koeffizienten nicht zur Integrierbarkeit beitragen und daher entweder weglassen werden oder in einer anderen Form dargestellt werden können. Deswegen werden wir

$$\partial\omega = \frac{\partial p}{p} \quad \text{und} \quad \sin n\omega = \frac{p^{2n}-1}{2p^n}$$

setzen; dann wird aber weiter nach verändern der Form der Konstanten

$$\alpha \sin m\omega + \beta \cos m\omega = \frac{\alpha' p^{2m} + \beta'}{p^m}$$

und in gleich Weise

$$\gamma \sin n\omega + \delta \cos n\omega = \frac{\gamma' p^{2n} + \delta'}{p^n}$$

gesetzt werden können. Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, wird unsere Formel diese Form annehmen

$$\int \frac{p^{2n-2m-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha' p^{2m} + \beta'}{\gamma' p^{2n} + \delta'}.$$

§19 Diese Formel teilt sich nun überdies in zwei Teile, welche wir einzeln so darstellen wollen

$$\alpha' \int \frac{p^{2n-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n} + \delta')} + \beta' \int \frac{p^{2n-2m-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n} + \delta')}$$

und nun wird es nicht weiter schwierig sein, jede dieser beiden Formeln einzeln rational zu machen. Denn in der ersten muss man

$$p^{2n} - 1 = x^{2n}$$

setzen; dann wird nämlich

$$p^{2n-1}\partial p = x^{2n-1}\partial x \quad \text{und} \quad (p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}} = x^{2n-2m}$$

sein und so wird die erste Formel diese Form annehmen

$$\alpha' \int \frac{x^{2m-1}\partial x}{\gamma' x^{2n} + \gamma' + \delta'},$$

deren Integral sich also mit Logarithmen uns Kreisbogen darbieten lässt.

§20 Was aber die andere Formel angeht, zeigt sich die Reduktion ebenso leicht, wenn die Formel auf diese Weise dargestellt wird

$$\beta' \int \frac{\partial p}{p} \cdot \frac{p^{2n-2m}}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n}+\delta')}$$

oder

$$\beta' \int \frac{\partial p}{p} \left(\frac{p^2}{(p^{2n}-1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{n-m} \cdot \frac{1}{\gamma' p^{2n}+\delta'}.$$

Wenn nämlich hier

$$\frac{p^2}{(p^{2n}-1)^{\frac{1}{n}}} = y^2$$

gesetzt wird, wird

$$\frac{p^{2n}}{p^{2n}-1} = y^{2n}$$

werden und daher

$$p^{2n} = \frac{y^{2n}}{y^{2n}-1},$$

woher nach logarithmischem Differenzieren

$$\frac{\partial p}{p} = \frac{-\partial y}{y(y^{2n}-1)}$$

hervorgeht, nach Einsetzen welcher Werte diese Formel

$$-\beta' \int \frac{y^{2n-2m-1}\partial y}{(\gamma'+\delta')y^{2n}-\delta'}$$

werden wird, welche also gleichermaßen rational ist.

§21 Auf diese Weise ist also die Gültigkeit unseres Lehrsatzes hinreichend streng bewiesen worden und dieser Fall ist so beschaffen, dass die ganze Formel mithilfe einer einzigen Substitution in keiner Weise rational gemacht werden kann, welcher Umstand umso bemerkenswerter ist, weil für gewöhnlich alle Differentialformeln festgelegt zu werden pflegen, wie irrational auch immer sie waren, wenn deren Integrale mit Logarithmen und Kreisbogen dargeboten werden können, dass sie immer mithilfe einer bestimmten Substitution rational gemacht werden. Nun sehen wir also, dass diese Behauptung so eingeschränkt werden muss, dass sie nur auf die einzelnen Teile der vorgelegten Formel ausgedehnt wird, weil es ja freilich passieren kann, dass jeder Teil eine eigene Substitution verlangt.

§22 Wenn wir also diesen Beweis genauer anschauen, wird man leicht sehen, dass er auf sich um vieles weiter erstreckende Formeln ausgedehnt werden kann. Es wird nämlich klar werden, dass eine viel allgemeinere Formeln rational gemacht werden kann, was wir im folgenden Lehrsatz genauer erklären wollen.

EIN HÖCHST ALLGEMEINES THEOREM

§23 *Wenn die Buchstaben P und Q irgendwelche rationalen Funktionen der Form x^n bezeichnen, wird das Integral dieser Formel*

$$\int \frac{\partial x(Px^{m-1}+Qx^{n-1})}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}}$$

immer mit Logarithmen und Kreisbogen ausgedrückt werden.

BEWEIS

Man teile, wie wir es oben gemacht haben, diese Formel auch in zwei Teile welche

$$\int \frac{Px^{m-1}\partial x}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}} \quad \text{und} \quad \int \frac{Qx^{n-1}\partial x}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}}$$

seien, und es ist sofort klar, dass der zweite Teil durch Setzen von

$$a+bx^n = r^n$$

rational gemacht wird; dann wird nämlich

$$(a+bx^n)^{\frac{m}{n}} = r^m$$

sein, dann weiter

$$x^n = \frac{r^n - a}{b}$$

und

$$x^{n-1}\partial x = \frac{r^{n-1}\partial r}{b}.$$

Weil nun Q eine rationale Funktion x^n ist, wird nach der Substitution gewiss eine rationale Funktion von r^n hervorgehen und der zweite Teil wird diese Form annehmen

$$\frac{1}{b}\int Qr^{n-m-1}\partial r.$$

Damit der erste Teil rational gemacht wird, setze man

$$\frac{x}{(a+bx^n)^{\frac{1}{n}}} = s,$$

dass

$$\frac{x^m}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}} = s^m$$

wird, dann wird aber

$$x^n = \frac{as^n}{1-bs^n}$$

sein; wenn dieser Wert also in P anstelle von x^n eingesetzt wird, wird er offenbar eine rationale Funktion von s^n geben; weiter wird daraus aber

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial s}{s(1-bs^n)},$$

aus welchen Werten unser erster Teil

$$= \int \frac{Ps^{m-1}\partial s}{1-bs^m}$$

entspringt, welche Formel also auch rational ist.

Ja sogar in Winkeln kann ein viel allgemeineres Theorem vorgelegt werden, welches sich so verhalten wird:

Allgemeines Theorem

§24 *Wenn die Buchstaben P und Q irgendwelche rationalen Funktionen der zwei Formeln* $\sin 2n\omega$ *und* $\cos 2n\omega$ *sind, wird die folgende Integralformel immer mit Logarithmen und Kreisbogen abgehandelt werden können*

$$\int (P \sin m\omega + Q \cos m\omega) \partial (\sin n\omega)^{\frac{m}{n}},$$

wo man bemerke, dass

$$\partial (\sin n\omega)^{\frac{m}{n}} = \frac{m \partial \omega \cos n\omega}{(\sin n\omega)^{\frac{n-m}{n}}}$$

ist; sein Beweis gelingt in gleicher Weise wie oben, während gleichermaßen zu zwei Teilen gelangt wird, von welchen sich beide mit einer bestimmten Substitution rational machen lassen werden.

§25 Es wird wahrscheinlich vielen missfallen, dass die Auflösung der letzten Formel über imaginäre Substitutionen begründet wird, obwohl uns hier dennoch vorgelegt ist, die imaginären von den reellen Größen zu trennen; es wäre also sehr zu wünschen, dass diese Aufgabe ohne das Imaginäre gelöst werden könnte; aber ich bin gezwungen zu gestehen, dass ich in keinster Weise durchschaue, wie das geleistet werden kann. Weil überdies die Reduktion von imaginären Größen auf reelle schon ziemlich weit ausgebaut ist, scheint ein solches Mittel sogar gar nicht zu vermissen zu sein. Hier ergibt sich vielmehr eine neue Anwendung des Imaginären in der Auflösung von integralformeln, während integrierbare Formeln von solcher Art dargeboten werden können, deren Integrale sich nicht ohne Hilfe des Imaginären finden lassen.